

# “同心协力”策略研究

## 摘要

本文针对同心鼓刚体运动问题，对相关运动进行分析，使用常微分方程、动量守恒、欧拉角分解、空间解析几何、数值迭代求解、蒙特卡洛等方法，分别建立了微分方程数值求解模型、刚体转动欧拉角空间几何分析体系、圆盘定轴/点转动等模型，使用 matlab 等软件编程计算方法，得到关于圆心鼓问题的最优化策略、队员发力时机用力大小引起的鼓面倾斜角度计算结果、根据计算模拟的数据观察改进策略、精确条件下计算队员调整球到竖直方向的精确发力策略，最后本文还做了误差分析及灵敏度分析。

**针对问题一：**要求团队的最佳协作策略，即需要满足队员操作可行且做功最小。为了操作可行，我们认为队员拉力  $F$  不变；通过队员之间的最小距离求出理想的绳长。每次球被颠起的高度刚好离开鼓面 40 cm，此时队员拉力不变，球到达最高点与鼓面到达最低点为同一时刻，球与鼓面碰撞时绳与鼓面同时在水平面上。我们取球从最高点下落经过与鼓面的碰撞再次回到最高点的一次往复运动为研究对象，假设球的最高点与鼓面的最高点的距离  $H_1$  已知，可以得到球与鼓面相撞时球的速度与所需时间  $t$ ，通过能量守恒可得该时刻鼓面的速度，由于鼓面从最高点到达最低点的时间即为球从最低点到最高点的时间  $t$ ，该段时间鼓面移动距离  $H_2=40-H_1$ ，可以求得队员的拉力  $F$ 。

**针对问题二：**问题二考虑了实际情况下由于队员发力时机和用力大小的差异，引起的鼓面倾斜角度，并给定了八个队员的发力时机和用力大小，求在 0.1 s 时的鼓面倾斜角度。针对此类刚体转动问题，我们将问题分为刚体定轴问题与刚体定点问题，选用了欧拉角转动分解思想与空间解析几何方法，采用迭代方式求数值解。求解结果分布在 0 到 10 度区间。

**针对问题三：**针对问题 3，需要在队员发力时机和力度不能做到精确控制的现实条件下修正问题 1 的最佳协作策略。使用了极值分析方法，建立了线性反馈控制模型，得到了修正后的高度及如何改变绳子拉力使系统朝周期运动稳定状态变化。

**针对问题四：**针对问题 4，需要给出使鼓面倾斜给定角度和上升给定高度的所有队员的发力时机及力度，并且要做精确控制与现实情况差异的误差分析。由于球反弹高度，与竖直平面的夹角还有投影与队员之间夹角比例已知。因此可以准确计算得到球运动过程中的方向，为了将球调整为竖直状态弹跳，球鼓再次接触时的鼓面与第一次球鼓接触关于球最高点所在的竖直平面对称。鼓面目标状态已知，圆鼓运动为刚体定轴运动，沿转轴方向合外力为零建立方程组，通过欧拉角旋转分解与空间解析集合方法迭代计算队员的发力时机与用力大小可行域。

最后，交待一下论文的特色和闪光点在何处，还做了哪些具体的工作。比如一篇报告，论文的客观评价，模向和纵向的推广，结果的分析，论文的价值所在等。

**关键词：**“同心协力”策略研究 多目标规划 定轴转动 蒙特卡洛模拟 线性反馈控制

# 一、问题的重述

## 1.1 问题背景

项目所用排球的质量为 270 g。鼓面直径为 40 cm，鼓身高度为 22 cm，鼓的质量为 3.6 kg。队员人数不少于 8 人，队员之间的最小距离不得小于 60 cm。项目开始时，球从鼓面中心上方 40 cm 处竖直落下，球被颠起的高度应离开鼓面 40 cm 以上，如果低于 40cm，则项目停止。项目的目标是使得连续颠球的次数尽可能多。

## 1.2 问题的提出

1. 在理想状态下，每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度，试讨论这种情形下团队的最佳协作策略，并给出该策略下的颠球高度。

2. 在现实情形中，队员发力时机和力度不可能做到精确控制，存在一定误差，于是鼓面可能出现倾斜。试建立模型描述队员的发力时机和力度与某一特定时刻的鼓面倾斜角度的关系。设队员人数为 8，绳长为 1.7m，鼓面初始时刻是水平静止的，初始位置较绳子水平时下降 11 cm，表 1 中给出了队员们的不同发力时机和力度，求 0.1 s 时鼓面的倾斜角度。

3. 在现实情形中，根据问题 2 的模型，你们在问题 1 中给出的策略是否需要调整？如果需要，如何调整？

4. 当鼓面发生倾斜时，球跳动方向不再竖直，于是需要队员调整拉绳策略。假设人数为 10，绳长为 2m，球的反弹高度为 60cm，相对于竖直方向产生 1 度的倾斜角度，且倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间，与这两位队员的夹角之比为 1:2。为了将球调整为竖直状态弹跳，请给出在可精确控制条件下所有队员的发力时机及力度，并分析在现实情形中这种调整策略的实施效果。

# 二、问题的假设

- 1.假设小球与鼓面是完全弹性碰撞，忽略空气阻力等因素。
- 2.假设小球和鼓面都是刚体,忽略接触应力。
- 3.假设该地点质量为 1kg 的物体受到的重力大小是 9.8N，即  $g=9.8\text{N/kg}$ 。
- 4.假设人只接触绳端，绳端始终保持在绳拉直时的水平面上，绳的方向始终在过圆鼓几何中心的竖直平面上。
- 5.球看作质点，大小忽略不计。

### 三、问题的分析

#### 2.1 对问题一的分析

在第一题中我们衡量策略好坏的标准是做功最少，然后根据该标准确定应当满足的运动条件。首先通过队员之间的最短距离求得最短绳长，其次通过对球在最高点和最低点两个时刻的受力和状态分析，求得球该时刻的速度，然后通过能量守恒原理得到鼓此刻的速度，又因为球到达最高点时鼓面到达最低点，所以由上述条件可以求出最小的拉力  $F$ 。

#### 2.2 对问题二的分析

第二题是一个刚体动力系统分析问题。题目要求在给定条件下，计算不同情况下鼓面相对于水平面的倾斜角。情况由简单到复杂，特殊到一般，一共列举了九种情况。本题采用计算机迭代求解，将刚体连续的运动状态划分为多个离散的运动状态区间，通过增加迭代次数提高精度。

前七种情况由于后续拉力关于初始转轴对称，相互抵消，初始转轴的方向没有受到影响，因此每一瞬间可以简化为刚体定轴旋转问题，用标量求解。

第八、九种情况，后续拉力与初始拉力不对称，因此不再是刚体定轴旋转问题，而是更一般的刚体定点旋转问题，采用欧拉角的思想与旋转矩阵使用空间解析几何方法求解。

#### 2.3 对问题三的分析

依据题意，在现实状况中，队员发力时机和力度不可能做到精确控制，存在一定误差，鼓面可能出现倾斜，导致球反弹的方向脱离竖直方向且高度低于最佳策略高度。相比于第一问中的最佳策略，需要改变高度且使球恢复竖直方向运动。同时尽量保证理想条件下运动持续，满足此条件时鼓

最大可能倾角为  $\theta$ ，则在现实情况下的模型修改，鼓倾斜角度  $\theta < \theta_{\max}$ ，球落在鼓的水平面投影上，球鼓撞击在初始撞击高度附近。

### 四、基本符号说明

序	符号	意义
1	$m_1$	排球的质量
2	$m_2$	鼓的质量
3	$n$	队员人数
4	$s$	队员距离
5	$H_{\min}$	排球离开鼓最小距离

6	$r$	鼓面半径
7	$L$	鼓（看作圆柱体）母线长
8	$F$	绳上拉力
9	$g$	重力加速度
10	$L_T$	绳长

## 五 模型的建立与求解

### 5.1 问题一的建立与求解

#### 5.1.1 绳拉鼓模型

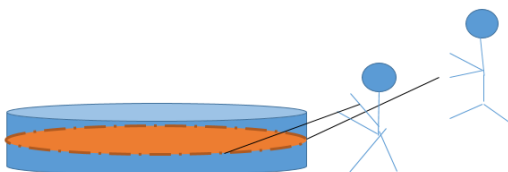


图 1 队员拉鼓

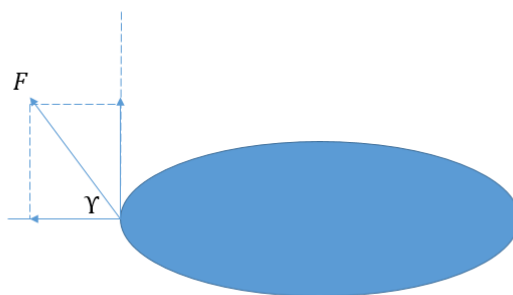
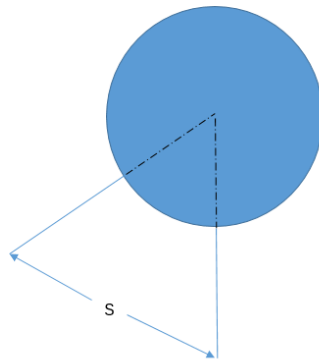


图 2 鼓母线中点所在平行于水平面的平面

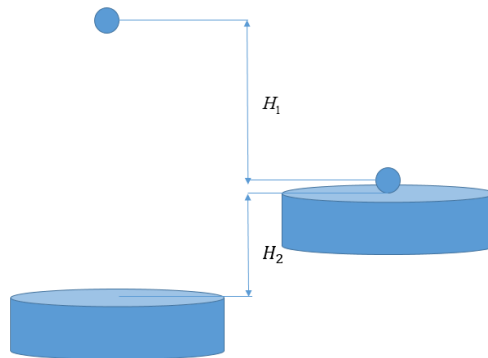
由分析和假设可知，绳的方向始终在过圆鼓几何中心的竖直平面上（如图 1 和图 2 所示）。而要使得做功最小，则水平面上分力应该为 0。即发力方向与水平面夹角、发力大小都一致，这种情况下鼓身不能倾斜，理想情况下上可以无限进行下去。



图三 队员距离示意图

同时，队员之间的最小距离  $s$  不得低于  $60\text{cm}$ （如图三所示）。因此考虑人的位置不变而手可以前后移动。

### 5.1.2 球鼓碰撞模型



图四 球鼓碰撞模型示意图

由分析可知，球与鼓的碰撞原则上可以一直进行下去。选取一个周期  $T_t = 2t_0$  为研究对象， $t_0$  即小球经过从最高点到最低点(同时也是鼓从最低点到最高点)的时间。小球落到最低点且当达到最高点时，球和鼓发生完全弹性碰撞，之后小球返回最高点，鼓面返回最低点（如图四所示）。

### 5.1.3 最优策略求解

设球鼓碰撞时，球运动高度为  $H_1$ ，鼓运动高度为  $H_2$ ，且  $H_1 + H_2 = H_{\min} = 0.4$ ，圆柱体母线长  $L$ ，该段运动时间  $t_0$  的。设球碰撞时刻前速度为  $v_1$ ，鼓碰撞时刻前速度为  $v_2$ ，碰撞后球原速返回，速度方向以向下为正。

$$L_T \geq \frac{s}{2 \sin(\frac{\pi}{n})} - r$$

根据相邻两人最短距离可算出，根据力 F 最小的目标取等号成立时的

$$L_T = \frac{s}{2 \sin(\frac{\pi}{n})} - r$$

从球最高点到球鼓碰撞这段时间，对于小球运动过程，

$$v_1 = \sqrt{2gH_1}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{2H_1}{g}}$$

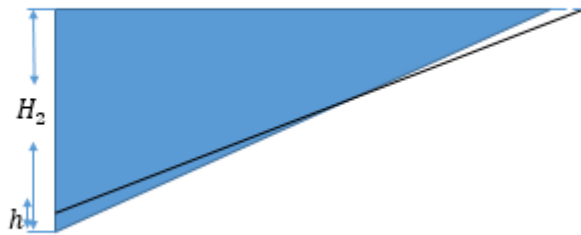
由动量守恒和能量守恒有

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= -m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 (-v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 \end{aligned}$$

$$\text{求得鼓的速度 } v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1, v_2' = \frac{m_1}{m_2} v_1'$$

对于鼓由最低点到最高点的运动过程，令  $v(t)$  表示  $t$  时刻的速度，则有初始条件：初始速度  $v(0) = 0$ ，球鼓碰撞时速度  $v(t_0) = v_2$ 。

采用微元法， $t$  时刻鼓高度为  $h$ ， $t$  至  $t + dt$  时间间隔内鼓上升了  $dh$ （如图五所示），



图五 微元法分析鼓的上升

则针对鼓上升  $H_2$  的整个过程， $n$  个队员拉力  $F$  做功  $W_{nF} = \int_0^{H_2} nF \cdot \frac{H_2 - h}{L_T} dh = \frac{nF}{2L_T} H_2^2$ ，冲量

$$dI = (nF \frac{H_2 - h}{L_T} - m_2 g) dt = m_2 dv, \text{ 化简得到}$$

$$\Rightarrow m_2 \frac{dv}{dt} = nF \cdot \frac{H_2 - h}{L_T} - m_2 g, \text{ 再对两边对 } t \text{ 求导}$$

$$\Rightarrow m_2 \frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{nF}{L_T} \cdot \frac{dh}{dt} = -\frac{nF}{L_T} v, \text{ 即 } \frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{nF}{mL_T} v$$

$$\text{代入初始条件求得 } v(t) = \frac{v_2}{\sin\left(\sqrt{\frac{nF}{m_2 L_T}} \cdot t_0\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{nF}{m_2 L_T}} \cdot t\right),$$

$$\text{则 } H_2 = \int_0^{t_0} v(t) dt = \frac{v_2 \sqrt{\frac{m_2 L_T}{nF}}}{\sin\left(\sqrt{\frac{nF}{m_2 L_T}} \cdot t_0\right)} (1 - \cos \sqrt{\frac{nF}{m_2 L_T}} \cdot t_0),$$

$$\text{对于鼓, 该过程由能量守恒, } W_{nF} - mgH_2 = \frac{1}{2} m v_2^2,$$

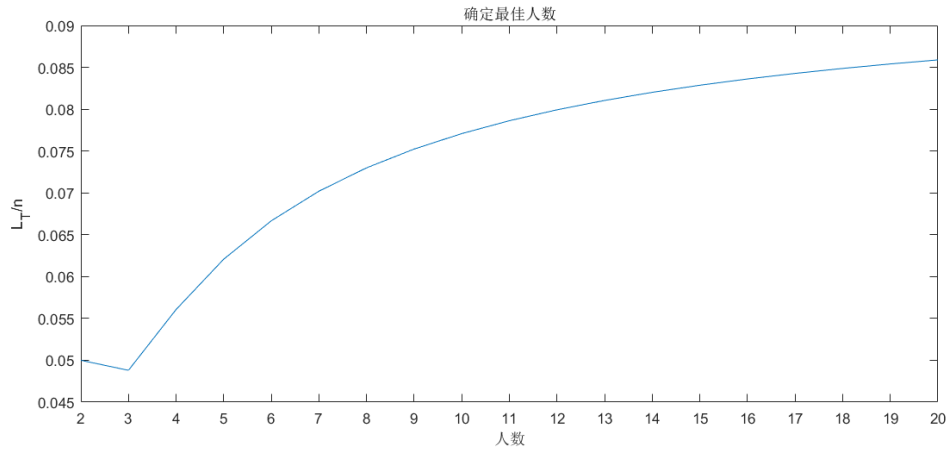
$$\text{解方程组 } \begin{cases} H_1 + H_2 = H_{\min} & \text{①} \\ H_2 = \frac{v_2 \sqrt{\frac{m_2 L_T}{nF}}}{\sin\left(\sqrt{\frac{nF}{m_2 L_T}} \cdot t_0\right)} (1 - \cos \sqrt{\frac{nF}{m_2 L_T}} \cdot t_0) & \text{②} \\ \frac{nF H_2^2}{2L_T} - m_2 g H_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 & \text{③} \end{cases},$$

将③代入②, 由  $\frac{nF}{L_T} = \frac{m_2(2gH_2 + v_2^2)}{H_2^2}$  消去  $n, F, L_T$ , 得到有关  $H_1$  和  $H_2$  的二元方程组 (可看出  $H_2$  与  $n, F, L_T$  无关, 由 matlab 程序解之得数值解

$$H_1 = 0.2955, \quad H_2 = 0.1045$$

$$F = \frac{m_2(2gH_2 + v_2^2) \left( \frac{s}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - r \right)}{nH_2^2} \quad \text{可得 } F \propto \frac{\left( \frac{s}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - r \right)}{n},$$

目标为 F 最小, 由



图六 matlab 分析最优人数

由此确定最佳人数为 3（如图六所示）。

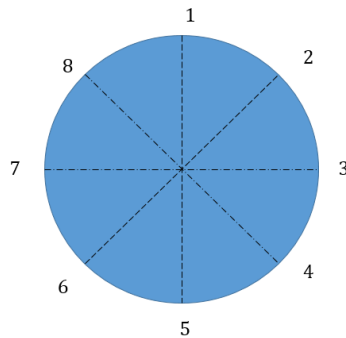
$n=3$  代入上述式子，求得  $F=33.4885\text{N}$ ， $L_T=0.1464\text{m}$ 。

此时绳长  $L_T > H_2 \cap (L_T - \sqrt{L_T^2 - H_2^2}) < \text{手长}$  不违背假设。

综合来看，本模型经过一周期后每个人做功 0， $F$  也取得了最小值。且从初始状态开始就进入周期，人一直发恒力，物理量和物理过程也对称，方式简单。

## 5.2 问题二的建立与求解

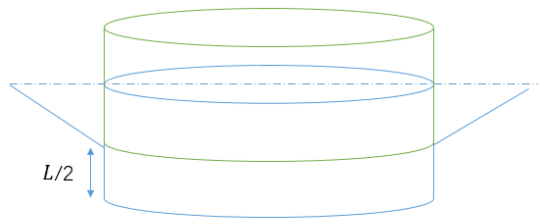
### 5.2.1 问题的基本条件



图七 初始条件人的分布

根据问题假设和题目分析可知，初始状态下八个人均匀地分布在圆周上（如图七所示），且在之后的运动过程中绳端始终保持在绳拉直的水平面上，绳子方向始终在圆心所在的竖直平面上。计算可得在动力系统运动过程中平动产生的变化十分微小，因此水平面平动忽略不计。此问题中圆鼓简化为圆盘。且圆鼓模型静止时鼓面所在的水平面是绳拉直后绳所在的水平平面（如图八所示）。





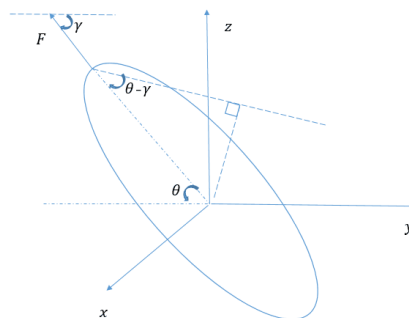
图八 示意图：圆鼓模型静止示意图

圆盘转动惯量  $J$ ， $m_2$  为鼓质量，则由上述条件，

$$J = 1/4m_2r^2 + 1/12m_2L^2$$

由于鼓的受力时机相同，力的大小和方向分布不同，我们将该题分为三类分别讨论。

### 5.2.2 分类一讨论



图九 力矩计算示意图

#### 序号 1 运动情况：

由图九，圆盘以  $x$  轴为转轴旋转了  $\theta$ ，绳拉力  $F$  与水平面所成夹角  $\gamma$ ，由角之间的关系可知合外力矩，

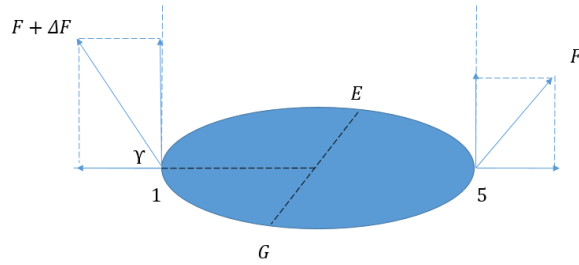
$$M = Fr\sin(\theta - \gamma);$$

圆盘转动惯量  $J$ ， $m_2$  为鼓质量，则由上述条件，

$$J = 1/4m_2r^2 + 1/12m_2L^2$$

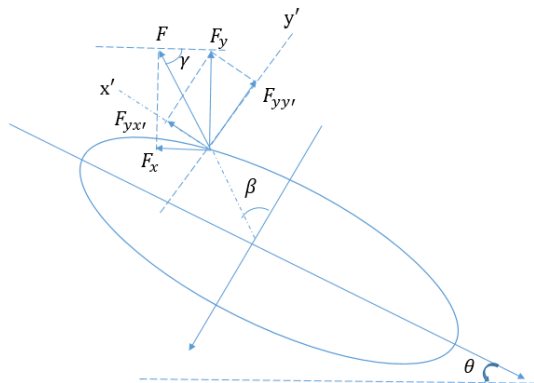
产生的角加速度为

$$\alpha = M / J ;$$



图十 初始情况下一对处在直径两端队员的拉力分析图

对于 1 和 5，初始情况下，竖直方向上，1 的作用力分量  $(F + \Delta F) \sin \Upsilon$ ，其中竖直方向上的分量  $F \sin \Upsilon$ ，与 5 的拉力  $F$  在竖直方向上的分量作用相同，拉动鼓面向上， $\Delta F \sin \Upsilon$  部分拉动平面旋转，该平面的转轴是与 1 号-5 号方向垂直过圆心的直线 EG（如图十所示）。



图十一 不在圆盘转轴和转轴垂直平分线上的受力点分析

根据题目分析，不在圆盘转轴和转轴垂直平分线上的受力点，力矩受到该点到转轴的距离  $r \sin \beta$ 、圆盘与水平面偏角  $\theta$ 、外力  $F$  的影响。首先将  $F$  分解到竖直方向和水平方向的力  $F_y$  和  $F_x$ ，然后将这两个分力分别分解到垂直圆盘的力  $F_{yy'}$  和平行圆盘的力  $F_{xx'}$ 。因此该点力矩  $M$  为

$$M = Fr \sin \gamma \cos \beta \cos \theta - Fr \cos \gamma (\sin \beta)^2 \sin \theta \quad 2-1$$

合外力矩  $M$  为

$$M = \sum M_i \quad 2-2$$

又由角动量守恒定律求得角加速度

$$\alpha = M / J \quad 2-3$$

所以在任意一个时间段内  $\Delta T$  内,角速度  $\omega$  与角转动值  $\Delta\theta$  为

$$\omega = \alpha\Delta t$$

$$\Delta\theta = (2\omega + \alpha\Delta t) \cdot \Delta t / 2, \quad 2-4$$

又知圆盘除了转动运动,还存在竖直方向上的平动运动,即任意一个时间段  $\Delta t$  内,竖直方向合外力  $F_y$ 、物体向上移动的加速度  $a$ 、速度  $v$  与距离  $\Delta H$  为:

$$\begin{cases} F_y = \sum F_i \sin \gamma_i & 2-5 \\ a = F_y / m & 2-6 \\ v_n = v_{n-1} + a\Delta t, v_{n-1} \text{ 与 } v_n \text{ 分别为这一时间段的初始速度和结束速度} & 2-7 \\ \Delta H = h_{n-1} + (2v_{n-1} + \alpha(n)\Delta t) \Delta t, \alpha(n) \text{ 为该时刻的加速度} & 2-8 \end{cases}$$

因此设置步长为  $\Delta t$ , 迭代求解(步长越短结果精度越高)。

将 0.1s 划分为多个时间段, 每个时间段  $t(n-1)\sim t(n)$  内圆盘的运动参数所受外力不变,  $t(n)$  时刻根据物体运动所引起的受力大小方向变化, 重新分析物体的加速度, 并将这一时刻的结束状态作为下一时刻的初始状态。

### 序号 2 运动情况:

情况 2 与情况 1 的不同之处在于力的大小的变化。同理可得物体的初始转轴方向, 并由分析可得圆盘在后期运动过程中, 垂直于转轴的力相互抵消, 转轴不会发生改变。再由过程 2-4 迭代求解可得鼓面在 0.1s 的倾斜角度。

### 序号 3 运动情况:

与情况 1 和情况 2 同理。

## 5.2.3 分类二讨论

说明: 发力时机不同, 力度的大小和方向不同, 运动过程中没有垂直于转轴的力, 后期运动过程中转轴不发生变化。序号 4、5、6、7 运动情况都属于这类问题。

求解过程:

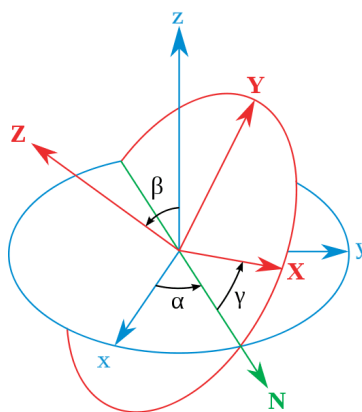
时间 t/s	
-0.1 - 0 s	圆盘转动简化为只有一个合外力做功, 根据 (<2-4>) 计算每个时间段的转角和位移, 迭代求解 0 s 的状态。

0 – 0.1 s	将-0.1 – 0 s 的结束状态作为该过程的初始状态，根据()计算每个时间段的转角和位移，迭代求解 0.1 s 的状态
-----------	--

情况 4、5、6、7 都可以按照上述求解过程求解。

### 5.2.4 分类三讨论

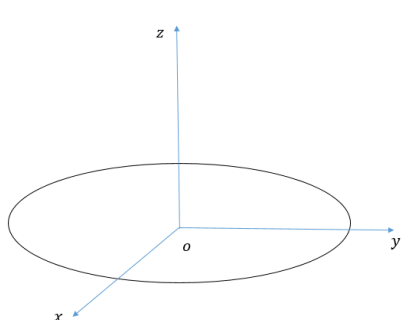
说明:队友发力时机、用力大小不一致，第一个发力时间段的转轴确定，而经分析第二个阶段的合外力与转轴所在的竖直平面成一定角度，因此第二阶段的转轴受力发生改变，因此圆盘的转动问题成为一个刚体定点螺旋运动分析问题。之前建立的刚体定轴转动模型不适用于该题。基于转轴变化的刚体转动模型，我们通过欧拉角与旋转矩阵结合空间解析几何方法迭代求解刚体在 0-0.1s 的转动状态过程。



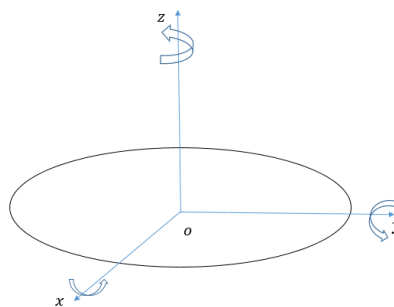
图十二 欧拉角示意图

求解模型:模型整体采用欧拉角的思想，欧拉角包括三个旋转角，根据这三个旋转角确定刚体的朝向，这三个旋转分别绕 x 轴、y 轴和 z 轴。

建系如图十三和图十四，逆时针为正方向。首先我们将圆盘的转动运动分解到 x 轴、y 轴和 z 轴上，圆盘转动的状态改变，也分别为在 x 轴、y 轴和 z 轴的旋转综合作用的结果。由问题的基本条件，绳方向始终在圆心所在的竖直平面上，而圆盘关于 z 轴的自转运动对圆盘整体位置的影响较小，因此在圆盘转动的分解中忽略圆盘绕 z 轴的转动分解。



图十三 建系步骤一



图十四 建系步骤二

本题依然通过迭代求数值解。在一次迭代中，设时间步长  $\Delta t$ ，步骤如下：

- ① 按照方程 2-4 求解关于 x 轴产生的转角  $\theta$
- ② 按照方程 2-4 求解关于 y 轴产生的转角  $\psi$
- ③ 根据关于 x 和关于 y 的旋转矩阵得到一次转动后的新坐标。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

关于 x 轴的坐标旋转变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

关于 y 轴的坐标旋转变换

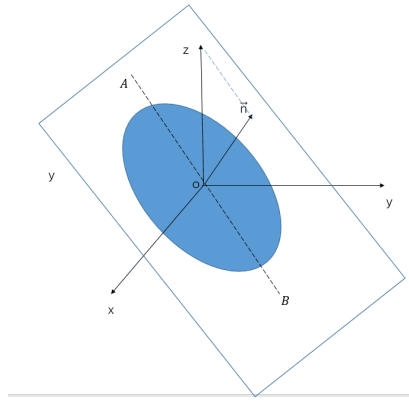
- ④ 初始圆盘法向量为  $\vec{n}_1$ ，方向为竖直方向(0,0,1),根据旋转矩阵得到转动后平面的法向量

$$\vec{n}_2 = (\sin \psi \cos \theta, -\sin \theta, \cos \psi \cos \theta)$$

- ⑤ 平面法向量可唯一确定平面的方向，已知两平面的夹角与它的法向量的夹角相等或互补，因此通过余弦公式可求得  $\vec{n}_2$  与 z 轴夹角：

$$\cos \sigma = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

- ⑥ 根据圆盘法向量与 z 轴构成的平面，求得和圆盘平面的交线，作为新转轴的方向向量(如图十五)。



图十五

⑦ 根据旋转更新后的坐标求得八个受力点，得到此刻各点力的方向与水平面的夹角。

⑧ 分析新的受力情况，重复步骤①②③④⑤⑥⑦直至迭代完成。

结果:

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8	鼓面倾角(度)
1	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1730
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
2	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3070
	用力大小	90	90	80	80	80	80	80	80	
3	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1341
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
4	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	4.5224
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
5	发力时机	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0	8.0056
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
6	发力时机	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0	7.9918
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
7	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	4.8569
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
8	发力时机	0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	9.2994
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
9	发力时机	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1	8.0855
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	

### 5.3 问题三的建立与求解

#### 5.3.1 问题三模型的建立

依据问题 2 的模型，假定人数  $n=8$ ，发力时机相差时间  $\Delta t=0.1s$ ，发力大小在  $F$  的情况下发力大

小之差  $\Delta F = \frac{F}{8}$ ，鼓最大可能倾角  $\theta_{\max} = 10^\circ$ 。对于一个周期运动内球鼓相距的最远距离

$H = H_1 + H_2$ ，第一问中为  $H_{\min} = 40cm$ 。

当鼓倾斜角度为 $\theta_{\max}$ 时，相比于问题一，球竖直方向最大位移改变量最大。

初始队员发力情况未知，为使球恢复竖直弹跳，队员需要调整发力方向和大小，引入引导混沌运动到周期运动的线性反馈控制方法[1]，球鼓运动作为整个系统，绳拉力作为系统的控制参数，问题1策略为稳态运动，此题中，人的拉力视为扰动项，作为控制参数加入模型，系统从第一题中的稳态运动跳跃到其它稳态运动队员通过调节控制参数使系统返回原周期运动稳定状态。

### 5.3.2 问题三模型的求解

最大高度 $H = H_1 + H_2$ 的调整：

问题一最优策略条件不变，当鼓倾斜 $\theta_{\max}$ ，球碰撞鼓的中心点时，由于在 $\Delta t$ 时间间隔内，鼓的水平位移为垂直位移的 $10^{-2}$ 数量级，可以忽略，球与鼓平行于鼓面的分速度不受碰撞影响，只有鼓面法向方向的分速度进行完全碰撞（分别由 $v_1 \cos \theta_{\max}$ 和 $v_2 \cos \theta_{\max}$ 变为 $-v_1 \cos \theta_{\max}$ 和 $-v_2 \cos \theta_{\max}$ ），碰撞之后两者速度大小不变，方向较竖直方向有 $2\theta_{\max}$ 的倾斜。碰撞后球竖直方向的分速度 $v_{1z} = v \cos 2\theta_{\max}$ ，球上升最大高度 $H_1' = H_1 \cos^2 2\theta_{\max}$ ，当 $H = H_1 + H_2 < H_{\min}$ ，项目停止。故调整

$$H_1' = \frac{H_1}{\cos^2 2\theta_{\max}} = 0.334686,$$

解得

$$H' = \frac{H}{\cos^2 2\theta_{\max}} = \frac{H_{\min}}{\cos^2 2\theta_{\max}} = 0.452990,$$

$$H_2' = \frac{H_2}{\cos^2 2\theta_{\max}} = 0.118304.$$

此时调整绳长 $L_T = 0.583938$ ，队员拉力 $F = \frac{m_2(2gH_2 + v_2^2)L_T}{nH_2^2} = 44.227600$ 。

使球恢复竖直弹跳的策略：

系统受队员发力这一扰动项，运动情况偏离问题一最优策略情况下周期运动变得混沌，通过该策略使得系统恢复周期运动。

系统的状态变量有球位移，球速度，鼓位移，鼓速度，鼓角速度（均为矢量，位意为相较初始位置的位移），令其为 $x_1 = \dot{x}, x_2 = \dot{x}_1, x_3 = \dot{x}_2, x_4 = \dot{x}_3, x_5 = \dot{x}_4$ 。一类五阶系统的微分方程为

$$\frac{d^5 x}{dt^5} + e \frac{d^4 x}{dt^4} + d \frac{d^3 x}{dt^3} + c \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} = a(x^2 - 1),$$

$a, b, c, d, e$ 为可根据系统初始状态变量求出的常数。可计算李雅普诺夫指数并度量混沌吸引子。

状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = a(x_1^2 - 1) - bx_2 - cx_3 - dx_4 - ex_5 \end{cases}$$

可计算系统平衡状态  $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5]^T$ 。

对每个平衡状态对状态方程加上反馈  $k_1(x_1 - \bar{x}_1)$  得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = a(x_1^2 - 1) - bx_2 - cx_3 - dx_4 - ex_5 - k_1(x_1 - \bar{x}_1), \end{cases}$$

再计算该平衡状态的雅可比矩阵并计算其特征方程，利用劳思稳定判据确定该平衡状态渐近稳定时  $k_1$  满足的条件：依据特征方程列出劳思表，第一列均为正解得  $k_1$  满足的条件。

例：取  $a=3.9, b=9.17, c=3.94, d=7.068, e=1$  时，有两个平衡状态  $[1, 0, 0, 0, 0]^T, [-1, 0, 0, 0, 0]^T$ ，对前者有劳思表

表 3-2 五阶系统的劳思表

$\lambda^5$	1	7.068	9.17
$\lambda^4$	1	3.94	$k_1 - 7.8$
$\lambda^3$	3.128	$16.97 - k_1$	0
$\lambda^2$	$\frac{k_1 - 4.64568}{3.128}$	$k_1 - 7.8$	0
$\lambda^1$	$\frac{-(k_1^2 - 11.831296k_1 + 2.5189944)}{k_1 - 4.64568}$	0	0
$\lambda^0$	$k_1 - 7.8$	0	0

则有  $7.8 < k_1 < 11.6144$ 。最后根据反馈计算  $n$  个  $F$  的变化。

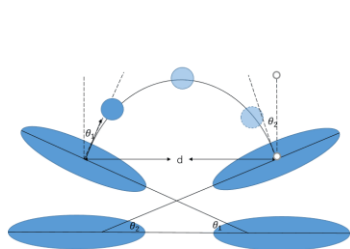
除此之外，若当前鼓偏移角度  $\theta$  较小（可能是有少数个队员提前  $\Delta t$  发力或发力超出  $\Delta F$ ），球鼓相撞之前可即刻将队员拉力增大数倍并统一大小维持极短时间，以减小  $\theta$ ，并在之后减小拉力，



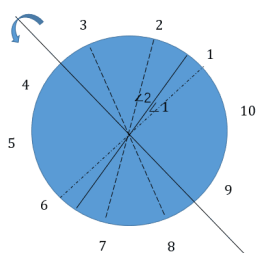
确保撞击高度;或者发力错误的队员的相对队员（关于鼓几何中心）增大拉力，其他所有队员减小拉力，以减小 $\theta$ 且尽量减小 $\Delta v$ 。球鼓相撞后，绳端后拉到初始位置固定不动，直至鼓在初始状态静止（此时球有一定上升高度），等待直到球下降到前高度时，参考鼓面水平时队员发力情况（发力大小和时机）通过中心对称变换改变鼓原有倾斜方向，由运动的对称性，球将弹回竖直高度。

## 5.4 问题四的求解

### 5.4.1 在可精确控制条件下所有队员的发力时机及力度



图十六 侧视图



图十七 俯视图

说明:我们假设球的倾斜完全由鼓面倾斜引起，若要将球调整回竖直弹跳方向，则球落下与鼓面二次接触时，此时鼓面应当与球鼓第一次接触时的鼓面关于球最高点所在的竖直平面对称(见图 4-1)。根据球竖直方向上的倾斜角度，和水平面上的投影与两位队员的夹角之比 1:2,可以唯一确定球的反弹瞬间的运动方向 $\theta_1$ 和鼓球二次接触时球的运动方向 $\theta_2$ ( $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{ball}$ )。

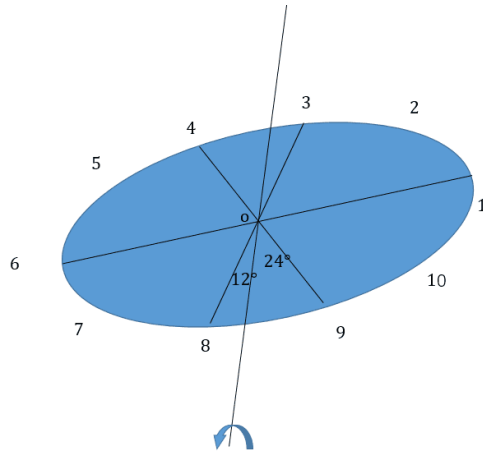
因此题意为精确控制全体成员的发力时机情况下，使得鼓面倾斜角度在与球接触的瞬间与第一次球鼓接触鼓面的倾斜角度 $\theta_1$ 相等。也就是控制鼓面的倾斜角度为 $\theta_1$ 。过程中鼓面不发生旋转，且转轴一定。（见图 4-2）。得到发力时机与用力大小的可行域。

将球鼓相撞作为时间起始点。由于不知道时间起始点鼓的运动状态和小球的运动状态（包括不限于速度，角加速度，水平高度）。根据碰撞后小球的最高飞行高度 $h_{ball}=0.6$ 和关于垂直方向的倾角

$\theta_{ball}=1^\circ$ 可以算出小球碰撞后的初速度  $v_{ball} = \frac{\sqrt{2gh_{ball}}}{\cos \theta_{ball}} = 3.5763$  和鼓倾斜角度  $\theta_{drum} = \frac{\theta_{ball}}{2} = 0.5^\circ$ 。我们

假定第一次碰撞时鼓的质心处于和绳端同一水平面上且撞击点在鼓面面心。根据说明可计算得小球飞行时间  $t_{ball} = 2\sqrt{2gh_{ball}} = 0.6999$ ，飞行距离  $x_{ball} = v_{ball}t_{ball} \sin \theta_{ball} = 0.0419$ 。

设第一次碰撞倾斜方向向上指向队员 1, 2 之间且靠近 1。队员标号为向下看逆时针从 1 到 10。人数  $n=10$ 。



图十八

计算发力时机和用力大小的可行域:

$$\beta = [-102^\circ, -66^\circ, -30^\circ, 6^\circ, 42^\circ, 78^\circ, 114^\circ, 150^\circ, -174^\circ, -138^\circ]$$

$\beta$ 表示受力点在圆盘上与圆心的连线和转轴所成夹角

问题分析:

将鼓简化为圆盘模型，以转轴作为  $x$  轴。圆盘的转动分解到转轴与圆盘上垂直转轴的方向。因为我们需要精确控制鼓面倾斜角度，所以假定鼓面每一时刻只有垂直转轴方向的合外力，因此垂直转轴方向的偏角为  $0$ ，沿转轴方向的合外力为  $0$ 。则有：

设每个分力在垂直转轴方向上的合外力矩为

$$M_i = F(i) * \sin\gamma_i * \cos\beta_i * r * \cos 0 - F(i) * \cos\gamma_i * \sin\beta_i * \sin\beta_i * r * \sin 0$$

$$M_i = F(i) * \sin\gamma_i * \cos\beta_i * r$$

$$(i=1,2,3,4,5,6,7,8)$$

$F$  表示  $i$  号受力点的外力， $\gamma$  表示  $i$  号受力点的力与水平面的夹角， $\beta$  表示受力点在圆盘上与圆心的连线和转轴所成夹角， $r$  表示鼓面半径)

又因为在沿转轴方向的合外力为零，所以有：

$$\sum_{i=1}^8 (M_i = F(i) * \sin\gamma_i * \cos\beta_i * r) = 0 \quad \text{----- 4-1}$$

由几何分析可知

$$\sin\gamma_i = \frac{\frac{L}{2} - z_i}{L_T}$$

$z_i$  表示  $i$  号受力点的纵坐标。

由方程<2-4><2-8>可得圆盘倾斜的角度 $\theta$ 和竖直方向上的位移。

而每时每刻圆盘的位置和受力情况发生变化，将连续的变化分解成多个离散的区间，通过迭代计算出可行解。 $P_i$ 表示每个受力点。由于圆盘绕定轴旋转，因此只有关于因此由旋转矩阵可得

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{绕转轴旋转}$$

**计算过程:**

- ①根据<4-1>在合理区间内，选取力的初始状态，选取迭代步长  $\text{step}=t\_advance/\text{count}$ (0.1s 时间除以迭代次数)
  - ②分析受力，在该迭代过程中根据旋转矩阵计算圆盘位置。
  - ③ 每个迭代过程开头(代表时间变化)选择满足<4-1>的力度
  - ④ 重复②，直到迭代结束。
  - ⑤ 拟合以时间为自变量的可行域。
- 以上计算过程相当于遍历搜索所有解，且在此过程中，F 大小变化，计算量巨大。因此我们最终选取了规定八个力为恒力的特殊解。

**求近似解:**

假定队员可以调整鼓的位置并初始化为静止（这样鼓的初始的速度和加速度便不再重要）。

仿照问题二的情形，我们假定  $t\_advance = 0.1$  由静止上拉上升高度  $H$  并倾斜  $\theta_{\text{drum}}$ ，而之前的时间  $t_{\text{before}} = t_{\text{ball}} - t_{\text{advance}} - t_{\text{wait}} = 0.5$ , 停止时间  $t_{\text{wait}} = 0.0999$  让队员将鼓右移  $x_{\text{ball}}$ ，下移  $H$ ，向下看逆

时针旋转  $\beta_{\text{deflect}} = \frac{\beta_{\text{people}}}{3} = \frac{2\pi}{3n}$  并保持静止。为了简便计算，此时可以设所有队员沿绳用力  $F$ ，只有队员 6 多施加力  $\Delta F$  使鼓倾斜，从而转化为问题 2 的逆向问题。

用蒙特卡洛模拟算法依次计算变量  $F, \Delta F, H$  在每次模拟中的鼓倾斜角度  $\theta$  与上升高度  $h$  是否拟合  $\theta_{\text{drum}}$  与  $H$ 。最后找到最优解  $F = 252.0, \Delta F = 597.03, H = 0.070$ ，此时鼓实际倾角  $\theta = 0.499957$ ，实际上升高度  $h = 0.070025$ 。

队员序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
用力	0.5-0.5999	0.5-0.5999	0.5-0.5999	0.5-0.5999	0.5-0.5999	0.5-0.5999	0.5-0.5999	0.5-0.5999	0.5-0.5999	0.5-0.5999

时机										
用力大小	100.8	100.8	100.8	100.8	100.8	100.8	100.8	100.8	100.8	100.8

队员序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
用力时机	0.5999	0.5999	0.5999	0.5999	0.5999	0.5999	0.5999	0.5999	0.5999	0.5999
用力大小	252	252	252	252	252	849.03	252	252	252	252

### 5.4.1 在现实情形中这种调整策略的实施效果

根据问题 2 的模型。每个队员可能会多用  $\Delta F = \frac{F}{8}$  或早  $\Delta t = 0.1$  发力。

多发力情况下可计算得

队员序号	1	2, 10	3, 9	4, 8	5, 7	6
上升高度 h	0.0709	0.0705	0.0704	0.0704	0.0704	0.0708
偏转角度 $\theta$	0.4847	0.4875	0.4904	0.5032	0.5316	0.5398
期望上升 h=0.7, 偏转角度 $\theta=0.5$						

可见在队员关于旋转轴垂直平面对称地多发力情况下对上升高度影响不大，对旋转角度有一定的影响，但都接近期望值，可以近似满足题目目标。在不对称地多发力情况下，虽然鼓的倾斜方向会向另一个平面，但总角度较小，可以较为满足题目目标，小球弹起方向依然会较竖直方向有一定倾角但较小。

而早发力的情况下偏转角度在 10 度的数量级上，过大从而不满足题目目标。可见本题这种策略对队员多用力有一定鲁棒性，但对早发力很敏感。

## 六 模型的建立与求解

### 6.1 模型的检验

在第一题中我们采用了微分方程与角动量守恒等物理学定理，以做功最少为优化标准。得出最优人数与最优绳长。这种优化标准下建立的模型，适用于机械内部构件，类似于汽车轴承的优化考虑，在一定稳定的周期内做功最少稳定性最好。

第二题中我们采用了平面几何与空间解析几何方法, 利用迭代求数值解, 多种情况下鼓面倾斜角度在 10 度以内, 较为合理。

在第三题中, 我们考虑了现实状况中队员发力时机和力度不可能做到精确控制, 调整模型计算最大可能倾角。问题 4 采用了空间解析几何方法, 结合满足题意的方程限制条件, 在时间序列可行域中搜索特殊解, 得到的解为较为特殊的恒定力, 满足题意, 并且更为高效。

## 6.2 模型检验的分析

在模型检验中, 我们主要考虑了模型适用机械构件的情况, 没有考虑模型不适用的情况。比如同心鼓游戏, 在实际情况下, 颠球周期更长更容易把握球的路径, 并且有更长的反应和休息时间。

在问题二中, 我们考虑到计算机内部本身也是离散化的迭代求解, 因此采用了迭代方式求数值解。而在问题四中, 将蒙特卡洛方法局部求解与全局遍历求解相比较, 更低的时空复杂度, 结果也很好地满足条件。

## 6.3 模型灵敏度分析

在问题假设中, 我们假设绳子方向始终在圆心所在的平面上, 圆盘的运动相对比较平稳, 圆影响比较微小, 因此忽略不计。较小的误差内, 模型适用, 并且可以保持稳定持续的运动。但是如果一次失误使得圆盘发生了较大偏移, 那么我们建立的模型就不适用于这种情况下的运动分析, 不仅圆盘会发生不可忽略的平动和自旋, 而且绳子拉力方向也不再在圆心所在的平面上。

# 七 模型的进一步讨论

1. 球鼓碰撞损失能量: 接触应力, 发声发热。
2. 极短时间内计算鼓的水平位移, 并且计算绳子方向的总体变化 (绳末端即人手出依然保持在其最初点与初始鼓的质心所在的直线上) 及之后的对所有迭代物理量的改变。
3. 问题 1, 2 的解析解。
4. 将鼓面和球当作非刚体, 则其碰撞形变时间不能忽略; 绳子可能为弹性绳。
5. 考虑现实中存在的摩擦力、空气阻力等阻力。
6. 问题 1 最佳协作策略考虑其他多个目标。

# 八 模型的评价与推广

## 8.1 模型的评价与改进

在优点方面, 本文合理假设, 忽略对结果影响较小的部分因素, 将现实生活中的复杂模型视为理想情况, 简化算法, 取得了较好的效果; 采用了多目标规划和, 方法科学且广泛应用于求解最优策略问题; 利用数值解法获取结果。

但是本文仍有一些不足。首先, 模型抽象化, 将鼓与排球皆视为刚体, 实际情况下, 通过赫兹接触理论, 球与鼓面相撞时会产生接触应力并产生能量损失; 其次, 忽略鼓的水平位移这个小量; 忽略了阻力与绳上能耗。

本文在算法方面, 可以有所改进, 使用更多的启发式算法, 如第一题可以采用猴群算法找出多

个局部最优解。

## 8.2 模型的推广

本模型可以横向推广到球和平面的碰撞情况，包括不限于羽毛球，乒乓球等运动的求解。在飞行动力学场景中也有广泛应用。可以推广模型到其余多力场景下多物体体系下旋转与碰撞，

## 九 参考文献

- [1]张克义, 王珍吾著.理论力学[M].南京: 东南大学出版社.2017.
- [2]吴萍,冯卓宏,陈志华,郑卫峰,陈志高.定轴转动刚体的碰撞动力学实验研究[J].实验室科学,2019,22(02):29-32.
- [3]温亚芹.刚体转动惯量计算方法研究[J].黑龙江科学,2019,10(06):40-42.
- [4]夏爱生, 刘俊峰主编.数学建模与 MATLAB 应用[M].北京: 北京理工大学出版社.2016.
- [5] 王鹏.高阶系统混沌的反馈控制方法研究[D].东北林业大学硕士论文,2009. 线性反馈控制理论.
- [6] 李险峰.Lozi 混沌映射的线性反馈控制 [J].河北师范大学学报自然科学版),2007,31(4) :479-483.

## 十 附录

```
globalVar.m
global m1 m2 H_min r L d_people n_people F deltaF t_advance
J sin45 g L_T sin22_5 cos22_5;
m1=0.27 ;
m2=3.6;
H_min=0.4;
r=0.2;
L=0.22;
d_people=0.6;
n_people=8;
F = 80;
deltaF = 10;
t_advance=0.1;
J = 1/4.0 * m2 * power(r, 2) + 1/12.0* m2 *power(L, 2);
sin45 = sin(pi/4);
sin22_5 = sin(pi/8);
cos22_5 = cos(pi/8);
g = 9.8;
L_T = 1.7;
```

```
globalVar_3.m
global m1 m2 H_min r L d_people n_people F deltaF t_advance
```

```

J sin45 g L_T sin22_5 cos22_5;
m1=0.27 ;
m2=3.6;
H_min=0.4;
r=0.2;
L=0.22;
J = 1/4.0 * m2 * power(r, 2) + 1/12.0* m2 *power(L, 2);
sin45 = sin(pi/4);
sin22_5 = sin(pi/8);
cos22_5 = cos(pi/8);
g = 9.8;
d_people=0.6;

n_people=3;
L_T = 0.146410161513775;
F = 33.488455655266485;
deltaF = F/8;
t_advance=0.1;

Q1_n.m
x_max=20;
x = 2:1:x_max;
y=zeros(1,x_max-1);
for i=1:x_max-1
    y(i)=(d_people/(2*sin(pi/x(i))))-r)/x(i);
end
plot(x,y);

Q1_H_syms.m
clear H1 H2;
syms H1 positive;
syms H2 positive;

v1=power(2*g*H1,1/2);
t0=power(2*H1/g,1/2);
v2=-m1/m2*v1;

temp=power((2*g*H2+power(v2,2))/power(H2,2),1/2);
[H1,H2]=solve([H1+H2==H_min, ...
    H2==v2/(sin(temp*t0))*power(temp,-1)*(1-cos(temp*t0))
    ], [H1,H2], 'IgnoreAnalyticConstraints',true)

Q1_H_data.m

```

```

objfun = @(x) [x(1)+x(2)-H_min;...

-m1/m2*power(2*g.*x(1),1/2)/(sin(power((2*g.*x(2)+power(-m
1/m2*power(2*g.*x(1),1/2),2))/power(x(2),2),1/2)*power(2*x
(1)/g,1/2)))*power(power((2*g.*x(2)+power(-m1/m2*power(2*g
.*x(1),1/2),2))/power(x(2),2),1/2),-1)*(1-cos(power((2*g.*
x(2)+power(-m1/m2*power(2*g.*x(1),1/2),2))/power(x(2),2),1
/2)*power(2.*x(1)/g,1/2)))-x(2) ...
];
x1_0 = 0.3;
x0=[x1_0, H_min-x1_0];

[x]=fsolve(objfun,x0);

```

Q1\_other.m

```

H1=x(1);
H2=x(2);
v1=power(2*g*x(1),1/2);
t0=power(2*x(1)/g,1/2);
v2=-m1/m2*v1;

n_people=12;
L_T=d_people/(2*sin(pi/n_people))-r;
F = m2*(2*g*H2+power(v2,2))*L_T/n_people/power(H2,2);

```

init.m

```

h=0;
theta=0;
v=0;
w=0;
gammar=zeros(1,8);
for i=1:8
    gammar(i)=asin(L/(2*L_T));
end

```

iterate2\_1.m

```

init;
count=100000;
for i=1:count
    [h,theta,v,w,gammar] =
do1(h,theta,v,w,gammar,t_advance/count);
end
theta_Anglesystem = theta/pi*180;

```



```

dol.m
function [h,theta,v,w,gammar] =
dol(h,theta,v,w,gammar,deltat)

global F deltaF r sin45 L L_T J m2 g;
Mi = zeros(1,8);
F_zi = zeros(1,8);
for i=1:8
    F_zi(i) = F*sin(gammar(i));
end
F_zi(1) = (F+deltaF) * sin(gammar(1));
Mi(1) = (F+deltaF) * r * sin(gammar(1) - theta);
Mi(2) = F*sin(gammar(2)) * sin45*r *cos(theta)
-F*cos(gammar(2))*sin45 * sin45*r *sin(theta);
Mi(8) = Mi(2);
Mi(4) = -F*sin(gammar(4)) * sin45*r *cos(theta)
-F*cos(gammar(4))*sin45 * sin45*r *sin(theta);
Mi(6) = Mi(4);
Mi(5) = -F * r * sin(gammar(5) + theta);

M=0;
F_z=0;
for i=1:8
    M = M +Mi(i);
    F_z = F_z + F_zi(i);
end
alpha = M/J;
a = (F_z -m2*g) / m2;
h= h+(2*v+a*deltat)*deltat/2;
theta= theta+(2*w+alpha*deltat)*deltat/2;
w = w + alpha*deltat;
v = v + a*deltat;

gammar(1) = asin((L/2-r*sin(theta)-h)/L_T);
gammar(2) = asin((L/2-r*sin(theta)*sin45-h)/L_T);
gammar(8) = gammar(2);
gammar(3) = asin((L/2-h)/L_T);
gammar(7)=gammar(3);
gammar(4) = asin((L/2+r*sin(theta)*sin45-h)/L_T);
gammar(6)=gammar(4);
gammar(5) = asin((L/2+r*sin(theta)-h)/L_T);
end

```

```

iterate2_2.m

```

```

init;
count=100000;
for i=1:count
    [h,theta,v,w,gammar]
do2(h,theta,v,w,gammar,t_advance/count);
end
theta_Anglesystem = theta/pi*180;

```

```

do2.m
function [h,theta,v,w,gammar]
do2(h,theta,v,w,gammar,deltat)

```

```

global F deltaF r sin22_5 cos22_5 L L_T J m2 g;

```

```

Mi = zeros(1,8);

```

```

F_zi = zeros(1,8);

```

```

for i=1:8

```

```

    F_zi(i) = F*sin(gammar(i));

```

```

end

```

```

F_zi(1) = (F+deltaF) * sin(gammar(1));

```

```

F_zi(2) = F_zi(1);

```

```

Mi(2) = (F+deltaF)*sin(gammar(2)) * r*cos22_5 * cos(theta) -
(F+deltaF)*cos(gammar(2))*cos22_5 *r*cos22_5 *sin(theta);

```

```

Mi(1)=Mi(2);

```

```

Mi(3) = F*sin(gammar(3)) * sin22_5*r * cos(theta)
-F*cos(gammar(3))*sin22_5 * sin22_5*r *sin(theta);

```

```

Mi(8) = Mi(3);

```

```

Mi(4) = -F*sin(gammar(4)) * sin22_5*r *cos(theta)
-F*cos(gammar(4))*sin22_5 * sin22_5*r *sin(theta);

```

```

Mi(7)=Mi(4);

```

```

Mi(5) = -F*sin(gammar(5)) * r*cos22_5 * cos(theta) -
F*cos(gammar(5))*cos22_5 *r*cos22_5 *sin(theta);

```

```

Mi(6)=Mi(5);

```

```

M=0;

```

```

F_z=0;

```

```

for i=1:8

```

```

    M = M +Mi(i);

```

```

    F_z = F_z + F_zi(i);

```

```

end

```

```

alpha = M/J;

```

```

a = (F_z -m2*g) / m2;

```

```

h= h+(2*v+a*deltat)*deltat/2;
theta= theta+(2*w+alpha*deltat)*deltat/2;
w = w + alpha*deltat;
v = v + a*deltat;

gammar(1) = asin((L/2 -cos22_5*r*sin(theta) -h)/L_T);
gammar(2)=gammar(1);
gammar(3) = asin((L/2 -sin22_5*r*sin(theta) -h)/L_T);
gammar(8) = gammar(3);
gammar(4) = asin((L/2 +sin22_5*r*sin(theta) -h)/L_T);
gammar(7)=gammar(3);
gammar(5) = asin((L/2 +cos22_5*r*sin(theta) -h)/L_T);
gammar(6)=gammar(5);
end

```

iterate2\_3.m

```

init;
count=100000;
for i=1:count
    [h,theta,v,w,gammar] =
do3(h,theta,v,w,gammar,t_advance/count);
end
theta_Anglesystem = theta/pi*180;

```

do3.m

```

function [h,theta,v,w,gammar] =
do3(h,theta,v,w,gammar,deltat)

```

```

global F deltaF r sin22_5 cos22_5 L L_T J m2 g;

```

```

Mi = zeros(1,8);

```

```

F_zi = zeros(1,8);

```

```

for i=1:8

```

```

    F_zi(i) = F*sin(gammar(i));

```

```

end

```

```

F_zi(1) = (F+deltaF) * sin(gammar(1));

```

```

F_zi(4) = F_zi(1);

```

```

Mi(3) = F*sin(gammar(3)) * r*cos22_5 * cos(theta) -
F*cos(gammar(3))*cos22_5 *r*cos22_5 *sin(theta);

```

```

Mi(2)=Mi(3);

```

```

Mi(4) = (F+deltaF)*sin(gammar(3)) * sin22_5*r * cos(theta)
-(F+deltaF)*cos(gammar(3))*sin22_5 * sin22_5*r *sin(theta);

```

```

Mi(1) = Mi(4);

```

```

Mi(5) = -F*sin(gammar(5)) * sin22_5*r *cos(theta)
-F*cos(gammar(5))*sin22_5 * sin22_5*r *sin(theta);
Mi(8)=Mi(5);
Mi(6) = -F*sin(gammar(6)) * r*cos22_5 * cos(theta) -
F*cos(gammar(6))*cos22_5 *r*cos22_5 *sin(theta);
Mi(7)=Mi(6);

M=0;
F_z=0;
for i=1:8
    M = M +Mi(i);
    F_z = F_z + F_zi(i);
end
alpha = M/J;
a = (F_z -m2*g) / m2;
h= h+(2*v+a*deltat)*deltat/2;
theta= theta+(2*w+a*deltat)*deltat/2;
w = w + alpha*deltat;
v = v + a*deltat;

gammar(3) = asin((L/2 -cos22_5*r*sin(theta) -h)/L_T);
gammar(2)=gammar(3);
gammar(4) = asin((L/2 -sin22_5*r*sin(theta) -h)/L_T);
gammar(1) = gammar(4);
gammar(5) = asin((L/2 +sin22_5*r*sin(theta) -h)/L_T);
gammar(8)=gammar(5);
gammar(6) = asin((L/2 +cos22_5*r*sin(theta) -h)/L_T);
gammar(7)=gammar(6);
end

```

Q3\_init.m

```

globalVar;
theta_max=10/180*pi;
H_min = H_min/power(cos(2*theta_max),2);
objfun = @(x) [x(1)+x(2)-H_min;...

-m1/m2*power(2*g*x(1),1/2)/(sin(power((2*g*x(2)+power(-m1/
m2*power(2*g*x(1),1/2),2))/power(x(2),2),1/2)*power(2*x(1)
/g,1/2)))*power(power((2*g*x(2)+power(-m1/m2*power(2*g*x(1)
),1/2),2))/power(x(2),2),1/2),-1)*(1-cos(power((2*g*x(2)+p
ower(-m1/m2*power(2*g*x(1),1/2),2))/power(x(2),2),1/2)*pow
er(2*x(1)/g,1/2)))-x(2) ...
];
x1_0=0.33;

```

```
[x]=fsolve(objfun,[x1_0,H_min-x1_0]);

H1=x(1);
H2=x(2);
v1=power(2*g*x(1),1/2);
t0=power(2*x(1)/g,1/2);
v2=-m1/m2*v1;
n_people=8;
L_T=d_people/(2*sin(pi/n_people))-r;
F = m2*(2*g*H2+power(v2,2))*L_T/n_people/power(H2,2);
```

Q4\_glaobalVar.m

```
global m1 m2 H_min r L d_people n_people ...
      F      J g L_T theta_deflect beta_deflect beta_people
H_bounce beta Fi...
      H0 deltaF t_advance;
m1=0.27 ; %D;ÇòÖÊÁ;
m2=3.6; %¹ÄÖÊÁ;
H_min=0.4; %D;ÇòÀë;¹Ä×îD;³àÀë
r=0.2; %¹ÄÃæ°ë³¶
L=0.22; %¹Ä ,ß¶È
d_people=0.6; %ÈËÖ@³ä×îD;³àÀë
J = 1/4.0 * m2 * power(r, 2) + 1/12.0* m2 *power(L, 2); %×³¶¹ßÁ;
g = 9.8;
```

```
n_people=10; % ÈËÊý
L_T = 2; %Éþ³α
```

```
theta_deflect = 1/2/180*pi; %¹ÄÇãD±½Ç¶È
beta_people = 2*pi/n_people; %ÈË¹D½Ç
beta_deflect = beta_people*1/(1+2); %¹ÄÇãD±Ö, Ìò¶ÓÔ±µÄD;½Ç
H_bounce = 0.6; %µ⁻Æð,ß¶È
```

```
beta=[-pi/2, ...
      -(pi/2-beta_people), ...
      -beta_people/2,...
      beta_people/2,...
      pi/2-beta_people,...
      pi/2, ...
      pi/2-beta_people, ...
      beta_people/2,...
```

```

    -beta_people/2, ...
    -(pi/2-beta_people), ...
];

```

```

F = 252; %Öý³£Á;
H0=L/2;
deltaF = 0; %¶àµÄÄ;
t_advance = 0.1;
Fi=zeros(1,n_people);
for i=1:n_people
    Fi(i)=F;
end
Fi(6) = F+deltaF;

```

Q4\_init.m

```

h=0;
x=0;
theta=0;
v_z=0;
v_x=0;
w=0;
gammar=zeros(1,n_people);
for i=1:n_people
    gammar(i)=asin(H0/(L_T));
end

```

Q4\_before.m

```

t_ball_z = power(2*H_bounce/g, 1/2);
t_collide = 2* power(2*H_bounce/g, 1/2);
v_ball_z = power(2*H_bounce*g,1/2);
v_ball_x = v_ball_z * tan(theta_deflect*2);
x_ball = v_ball_x * t_collide;

```

Q4\_do.m

```

function [h,x,theta,v_z,v_x,w,gammar] =
Q4_do(h,x,theta,v_z,v_x,w,gammar,deltat,H0)

```

```

global n_people F deltaF r beta L_T J m2 g beta_people;
Mi = zeros(1,n_people);
F_zi = zeros(1,n_people);
F_xi = zeros(1,n_people);
for i=1:n_people

```

```

    F_zi(i) = F*sin(gammar(i));
end
F_zi(6) = (F+deltaF) * sin(gammar(6));
for i=1:n_people
    F_xi(i) = F*cos(gammar(i))*sin(beta(i));
end
F_xi(6) = (F+deltaF) * cos(gammar(6))*sin(beta(6));

Mi(1) = -F * r * sin(gammar(1) + theta);
Mi(2) = -F*sin(gammar(2)) * cos(beta_people)*r *cos(theta)
--F_xi(2) * cos(beta_people)*r *sin(theta);
Mi(10) = Mi(2);
Mi(3) = -F*sin(gammar(3)) * sin(beta_people/2)*r *cos(theta)
--F_xi(3) * sin(beta_people/2)*r *sin(theta);
Mi(9)=Mi(3);
Mi(4) = F*sin(gammar(4)) * sin(beta_people/2)*r *cos(theta)
--F_xi(4) * sin(beta_people/2)*r *sin(theta);
Mi(8) = Mi(4);
Mi(5) = F*sin(gammar(5)) * cos(beta_people)*r *cos(theta)
-F_xi(5) * cos(beta_people)*r *sin(theta);
Mi(7)=Mi(5);
Mi(6)=(F+deltaF) * r * sin(gammar(6) - theta);

M=0;
F_z=0;
F_x=0;
for i=1:n_people
    M = M +Mi(i);
    F_z = F_z + F_zi(i);
    F_x = F_x + F_xi(i);
end
alpha = M/J;
a_z = (F_z -m2*g) / m2;
a_x = (F_x)/m2;
h= h+(2*v_z+a_z*deltat)*deltat/2;
theta= theta+(2*w+alpha*deltat)*deltat/2;
x=x+(2*v_x+a_x*deltat)*deltat/2;
w = w + alpha*deltat;
v_z = v_z + a_z * deltat;
v_x = v_x +a_x * deltat;

gammar(1) = asin((H0+r*sin(theta)-h)/L_T);
gammar(2) = asin((H0+cos(beta_people)*r*sin(theta)-h)/L_T);
gammar(10) = gammar(2);

```

```

gammar(3) =
asin((H0+sin(beta_people/2)*r*sin(theta)-h)/L_T);
gammar(9)=gammar(3);
gammar(4) =
asin((H0-sin(beta_people/2)*r*sin(theta)-h)/L_T);
gammar(8)=gammar(4);
gammar(5) = asin((H0-cos(beta_people)*r*sin(theta)-h)/L_T);
gammar(7)=gammar(5);
gammar(6) = asin((H0-r*sin(theta)-h)/L_T);
end

```

Q4\_main.m

```

Q4_glaobalVar;
Q4_init;

```

```

deltaF=597.03;
H0=0.0700;
Fi(6) = F+deltaF;

```

```

Fi(5) = F*(1+1/16);
%Fi(6) = F*(1+1/8)+deltaF;

```

```

count=10000;
for i=1:count
    [h,x,theta,v_z,v_x,w,gammar] =
Q4_do(h,x,theta,v_z,v_x,w,gammar,t_advance/count,H0);
end
theta_Anglesystem = theta/pi*180;

```

```

Temp=abs(theta_Anglesystem-0.5)+abs(H0-h);

```

Q4\_main2.m

```

Q4_init;
count=1000;

```

```

deltaF=50;
H0=0.05;

```

```

minX=[H0,deltaF];
minResult=[0,0];
minDiff=inf;

```

```

for H0 = 0.05:0.002:0.15
    for deltaF=500:0.1:800

```



```

    Q4_init;

    for i=1:count
        [h,x,theta,v_z,v_x,w,gammar]
Q4_do(h,x,theta,v_z,v_x,w,gammar,t_advance/count,H0);
    end
    theta_Anglesystem = theta/pi*180;

    temp=abs(theta_Anglesystem-0.5)+abs(H0-h);
    if(temp<minDiff)
        minX=[H0,deltaF];
        minDiff=temp;
        minResult=[theta_Anglesystem,h];
    end
end
end
end

```

```

w2eu2_8_z.m
global m1 m2 H_min r L d_people n_people ...
    F      J  g  L_T  theta_deflect  beta_deflect  beta_people
H_bounce beta Fi...
    H0 deltaF t_advance;
m1=0.27 ;
m2=3.6;
H_min=0.4;
r=0.2;
L=0.22;
d_people=0.6;
J = 1/4.0 * m2 * power(r, 2) + 1/12.0* m2 *power(L, 2);
g = 9.8;

n_people=10;
L_T = 2;

theta_deflect = 1/2/180*pi;

```

```

beta_people = 2*pi/n_people;
beta_deflect = beta_people*1/(1+2);
H_bounce = 0.6;

beta=[-pi/2, ...
      -(pi/2-beta_people), ...
      -beta_people/2,...
      beta_people/2,...
      pi/2-beta_people,...
      pi/2, ...
      pi/2-beta_people, ...
      beta_people/2,...
      -beta_people/2,...
      -(pi/2-beta_people),...
      ];

F = 252;
H0=L/2;
deltaF = 0;
t_advance = 0.1;
Fi=zeros(1,n_people);
for i=1:n_people
    Fi(i)=F;
end
Fi(6) = F+deltaF;

w2eu2_8_y.m
function e_point = w2eu2_8_y(w_x,w_y,w_z,psai)

Matrix_y=[cos(psai) 0 sin(psai) 0;
          0 1 0 0;
          -sin(psai) 0 cos(psai) 0;
          0 0 0 1;]*[w_x;w_y;w_z;1;];
e_point=zeros(1,3);
e_point(1)=Matrix_y(1);
e_point(2)=Matrix_y(2);
e_point(3)=Matrix_y(3);

end

w2eu2_8_x.m
function e_point = w2eu2_8_x( w_x,w_y,w_z,theta)

```

```

Matrix_x=[1 0 0 0;
          0 cos(theta) -sin(theta) 0;
          0 sin(theta) cos(theta) 0;
          0 0 0 1;]*[w_x ;w_y; w_z; 1;];
e_point=zeros(1,3);
e_point(1)=Matrix_x(1);
e_point(2)=Matrix_x(2);
e_point(3)=Matrix_x(3);

```

end

update\_shaft\_angle.m

```

function [ shaft_stress_direction ] =
update_shaft_angle(shaft_stress_direction, n_shaft,
points_init)

```

```

for i=1:8
shaft_stress_direction(i) =
acos(abs((points_init(i,1)*n_shaft(1)+points_init(i,2)*n_s
haft(2)+points_init(i,3)*n_shaft(3))/((power(points_init(i
,1).^2+points_init(i,2).^2+points_init(i,3).^2,1/2))* (powe
r(n_shaft(1).^2+n_shaft(2).^2+n_shaft(3).^2,1/2)))));
end

```

end

pre\_do2\_8.m

```

function [ h,theta,v,w,gammar,deltat ] =
pre_do2_8(h,theta,v,w,gammar,deltat)

```

```

global F r L L_T J m2 g sin22_5 sin67_5;

```

```

Mi = zeros(1,8);

```

```

F_zi =zeros(1,8);

```

```

F_zi(2)= F(2)*sin(gammar(2));

```

```

F_zi(5)= F(5)*sin(gammar(5));

```

```

F_z= F_zi(1)+F_zi(2);

```

```

a = (F_z -m2*g)/ m2;

```

```

Mi(2) = F(2)*sin(gammar(2)) *sin22_5*r *cos(theta)

```

```

-F(2)*cos(gammar(2))*sin22_5 * sin22_5*r *sin(theta);
Mi(5) = F(5)*sin(gammar(5)) *sin22_5*r *cos(theta)
-F(5)*cos(gammar(5))*sin22_5 * sin22_5*r *sin(theta);
M=Mi(2)+Mi(5);
alpha = M/J;
theta= theta+(2*w+alpha*deltat)*deltat/2;
w = w + alpha*deltat;

```

```

h= h+(2*v+a*deltat)*deltat/2;
v = v + a*deltat;
gammar(1) = asin((L/2+r*sin(theta)*sin22_5-h)/L_T);
gammar(2) = asin((L/2-r*sin(theta)*sin22_5-h)/L_T);
gammar(3) = asin((L/2-r*sin(theta)*sin67_5-h)/L_T);
gammar(4) = asin((L/2-r*sin(theta)*sin67_5-h)/L_T);
gammar(5) = asin((L/2-r*sin(theta)*sin22_5-h)/L_T);
gammar(6) = asin((L/2+r*sin(theta)*sin22_5-h)/L_T);
gammar(7) = asin((L/2+r*sin(theta)*sin67_5-h)/L_T);
gammar(8) = asin((L/2+r*sin(theta)*sin67_5-h)/L_T);

```

end

```

iterate.m
init;
global t_advance F;
count=10;
t=1000;

psai=0;
theta=0;
h=0;

n_shaft=[0 -1 0];
for i=1:count
    [ h,theta,v,w,gammar,deltat ] =
pre_do2_8(h,theta,v,w,gammar,t_advance/count);
end
for i=1:count
    [h,psai,v,w,points,gammar] =
change_shaft_y(F,h,psai,v,w,points,shaft_stress_direction,
gammar,t_advance/count);
    [h,theta,v,w,points,gammar] =
change_shaft_x(F,h,theta,v,w,points,shaft_stress_direction
,gammar,t_advance/count);

```

```

[n_shaft, angle]=circle_equation(theta,psai);

shaft_stress_direction=update_shaft_angle(shaft_stress_dir
ection, n_shaft, points_init);

end

angle_Anglesystem =angle/pi*180;
theta_Anglesystem =theta/pi*180;
psai_Anglesystem =psai/pi*180;

init.m
global L L_T sin45;
h=0;
theta=0;
v=0;
w=0;
gammar=zeros(1,8);
for i=1:8
    gammar(i)=asin(L/(2*L_T));
end

shaft_stress_direction = zeros(1,8);

shaft_stress_direction(1) = pi/8;
shaft_stress_direction(2) = pi/8;
shaft_stress_direction(3) = 3*pi/8;
shaft_stress_direction(4) = 3*pi/8;
shaft_stress_direction(5) = pi/8;
shaft_stress_direction(6) = pi/8;
shaft_stress_direction(7) = 3*pi/8;
shaft_stress_direction(8) = 3*pi/8;

points=zeros(8,3);
points(1,:)=[0 -0.2 0];
points(2,:)=[-0.2*sin45 -0.2*sin45 0];
points(3,:)=[-0.2 0 0];
points(4,:)=[-0.2*sin45 0.2*sin45 0];
points(5,:)=[0 0.2 0];

```

```

points(6,:)= [0.2*sin45 0.2*sin45 0];
points(7,:)= [0.2 0 0];
points(8,:)= [0.2*sin45 -0.2*sin45 0];

```

```

points_init=zeros(8,3);
points_init(1,:)= [0 -0.2 0];
points_init(2,:)= [-0.2*sin45 -0.2*sin45 0];
points_init(3,:)= [-0.2 0 0];
points_init(4,:)= [-0.2*sin45 0.2*sin45 0];
points_init(5,:)= [0 0.2 0];
points_init(6,:)= [0.2*sin45 0.2*sin45 0];
points_init(7,:)= [0.2 0 0];
points_init(8,:)= [0.2*sin45 -0.2*sin45 0];

```

do2\_8.m

```

function [h,theta,v,w,gammar] =
do2_8(h,shaft_stress_direction,v,w,gammar,deltat)

```

```

global F deltaF r L L_T J m2 g sin67_5 sin22_5;

```

```

Mi = zeros(1,8);

```

```

F_zi = zeros(1,8);

```

```

for i=1:8

```

```

    F_zi(i) = F*sin(gammar(i));

```

```

end

```

```

F_zi(1) = (F+deltaF) * sin(gammar(1));

```

```

Mi(1) = - (F*sin(gammar(1))
*cos(shaft_stress_direction(1))*r *cos(theta)
-F*cos(gammar(1))*cos(shaft_stress_direction(1)) *
shaft_stress_direction(1)*r *sin(theta));

```

```

Mi(2) = F*sin(gammar(2)) *cos(shaft_stress_direction(2))*r
*cos(theta)

```

```

-F*cos(gammar(2))*cos(shaft_stress_direction(2)) *
shaft_stress_direction(2)*r *sin(theta);

```

```

Mi(3) = F*sin(gammar(3)) *cos(shaft_stress_direction(3))*r
*cos(theta)

```

```

-F*cos(gammar(3))*cos(shaft_stress_direction(3)) *
shaft_stress_direction(3)*r *sin(theta);

```

```

Mi(4) = F*sin(gammar(4)) *cos(shaft_stress_direction(4))*r
*cos(theta)

```

```

-F*cos(gammar(4))*cos(shaft_stress_direction(4)) *
shaft_stress_direction(1)*r *sin(theta);

```

```

Mi(5) = F*sin(gammar(5)) *cos(shaft_stress_direction(5))*r
*cos(theta)

```

```

-F*cos(gammar(5))*cos(shaft_stress_direction(5))      *
shaft_stress_direction(1)*r *sin(theta);
Mi(6)          =          -(F*sin(gammar(6))
*cos(shaft_stress_direction(6))*r          *cos(theta)
-F*cos(gammar(6))*cos(shaft_stress_direction(6))      *
shaft_stress_direction(1)*r *sin(theta));
Mi(7)          =          -(F*sin(gammar(7))
*cos(shaft_stress_direction(7))*r          *cos(theta)
-F*cos(gammar(7))*cos(shaft_stress_direction(7))      *
shaft_stress_direction(1)*r *sin(theta));
Mi(8)          =          -(F*sin(gammar(8))
*cos(shaft_stress_direction(8))*r          *cos(theta)
-F*cos(gammar(8))*cos(shaft_stress_direction(1))      *
shaft_stress_direction(1)*r *sin(theta));

```

```

M=0;
F_z=0;
for i=1:8
    M = M +Mi(i);
    F_z = F_z + F_zi(i);
end
alpha_psai = M/J;
a_psai = (F_z -m2*g) / m2;
h= h+(2*v+a_psai*deltat)*deltat/2;
psai= psai+(2*w+alpha_psai*deltat)*deltat/2;
w = w + alpha_psai*deltat;
v = v + a_psai*deltat;

```

```

gammar(1)          =
asin((L/2-r*sin(theta)*cos(shaft_stress_direction(1))-h)/L
_T);
gammar(2)          =
asin((L/2-r*sin(theta)*cos(shaft_stress_direction(2))-h)/L
_T);
gammar(3)          =
asin((L/2-r*sin(theta)*cos(shaft_stress_direction(3))-h)/L
_T);
gammar(4)          =
asin((L/2+r*sin(theta)*cos(shaft_stress_direction(4))-h)/L
_T);
gammar(5)          =
asin((L/2+r*sin(theta)*cos(shaft_stress_direction(5))-h)/L
_T);

```

```

gammar(6) =
asin((L/2+r*sin(theta)*cos(shaft_stress_direction(6))-h)/L
_T);
gammar(7) =
asin((L/2+r*sin(theta)*cos(shaft_stress_direction(7))-h)/L
_T);
gammar(8) =
asin((L/2-r*sin(theta)*cos(shaft_stress_direction(8))-h)/L
_T);
end

```

glaobalVar.m

```

global m1 m2 H_min r L d_people n_people F deltaF t_advance
J g sin45 sin22_5 sin67_5 L_T;
m1=0.27 ;
m2=3.6;
H_min=0.4;
r=0.2;

```

```

d_people=0.6;
n_people=8;

```

```

deltaF = 10;
t_advance=0.1;
J = 1/4.0 * m2 * power(r, 2) + 1/12.0* m2 *power(L, 2);
sin45 = power(2,-1/2);
sin22_5 = sin(pi/8);
sin67_5 = sin(3*pi/8);
g = 9.8;
L_T = 1.7;

```

```

F =zeros(1,8);
F(1)=90;
F(2)=80;
F(3)=80;
F(4)=90;
F(5)=80;
F(6)=80;
F(7)=80;
F(8)=80;

```



```

circle_equation.m
function [n_shaft, angle] = circle_equation( theta,psai )

n1=[0 0 1];
n2=zeros(1,3);
point1 = w2eu2_8_x(n1(1),n1(2),n1(3),theta);
point2 = w2eu2_8_y(point1(1),point1(2),point1(3),psai)

for i=1:3
    n2(i) = point2(i);
end

cos_angle =
(n1(1)*n2(1)+n1(2)*n2(2)+n1(3)*n2(3))/(((n1(1).^2+n1(2).^
2+n1(3).^2)).^(1/2))*(((n2(1).^2+n2(2).^2+n2(3).^2)).^(1/2
)))
angle = acos(abs(cos_angle));

n_shaft = [n2(1)*n2(3) n2(2)*n2(3)
-n2(1)*n2(1)-n2(2)*n2(2) ];
end

change_shaft_z.m
function [h,psai,v,w,gammar] =
change_shaft_z(F,h,psai,v,w,shaft_stress_direction,gammar,
deltat)

end

change_shaft_y.m
function [h,psai,v,w,points,gammar] =
change_shaft_y(F,h,psai,v,w,points,shaft_stress_direction,
gammar,deltat)

global r L L_T J m2 g;
Mi = zeros(1,8);
F_zi = zeros(1,8);
for i=1:8
    F_zi(i) = F(i)*sin(gammar(i));
end

```

```

Mi (1)          =          - (F(1) *sin(gammar(1))
*cos(shaft_stress_direction(1)) *r          *cos (psai)
-F(1) *cos(gammar(1)) *cos(shaft_stress_direction(1)) *
cos(shaft_stress_direction(1)) *r *sin(pesai));
Mi (2)          =          F(2) *sin(gammar(2))
*cos(shaft_stress_direction(2)) *r          *cos (psai)
-F(2) *cos(gammar(2)) *cos(shaft_stress_direction(2)) *
cos(shaft_stress_direction(2)) *r *sin(pesai);
Mi (3)          =          F(3) *sin(gammar(3))
*cos(shaft_stress_direction(3)) *r          *cos (psai)
-F(3) *cos(gammar(3)) *cos(shaft_stress_direction(3)) *
cos(shaft_stress_direction(3)) *r *sin(pesai);
Mi (4)          =          F(4) *sin(gammar(4))
*cos(shaft_stress_direction(4)) *r          *cos (psai)
-F(4) *cos(gammar(4)) *cos(shaft_stress_direction(4)) *
cos(shaft_stress_direction(4)) *r *sin(pesai);
Mi (5)          =          F(5) *sin(gammar(5))
*cos(shaft_stress_direction(5)) *r          *cos (psai)
-F(5) *cos(gammar(5)) *cos(shaft_stress_direction(5)) *
cos(shaft_stress_direction(5)) *r *sin(pesai);
Mi (6)          =          - (F(6) *sin(gammar(6))
*cos(shaft_stress_direction(6)) *r          *cos (psai)
-F(6) *cos(gammar(6)) *cos(shaft_stress_direction(6)) *
cos(shaft_stress_direction(6)) *r *sin(pesai));
Mi (7)          =          - (F(7) *sin(gammar(7))
*cos(shaft_stress_direction(7)) *r          *cos (psai)
-F(7) *cos(gammar(7)) *cos(shaft_stress_direction(7)) *
cos(shaft_stress_direction(7)) *r *sin(pesai));
Mi (8)          =          - (F(8) *sin(gammar(8))
*cos(shaft_stress_direction(8)) *r          *cos (psai)
-F(8) *cos(gammar(8)) *cos(shaft_stress_direction(8)) *
cos(shaft_stress_direction(8)) *r *sin(pesai));

M=0;
F_z=0
for i=1:8
    M = M +Mi(i);
    F_z = F_z + F_zi(i);
end
alpha_pesai = M/J;
a_pesai = (F_z -m2*g) / m2;

psai= psai+(2*w+alpha_pesai*deltat) *deltat/2;

```

```

range_w =(2*w+alpha_pesai*deltat)*deltat/2;
w = w + alpha_pesai*deltat;
v = v + a_pesai*deltat;

for i=1:8
    e_point
    =w2eu2_8_y(points(i,1),points(i,2),points(i,3),range_w);
    points(i,1) = e_point(1);
    points(i,2) = e_point(2);
    points(i,3) = e_point(3);
end

for i=1:8
    points(i,3) = points(i,3)+h;
end

gammar(1) = asin((L/2-points(1,3))/(L_T));
gammar(2) = asin((L/2-points(2,3))/(L_T));
gammar(3) = asin((L/2-points(3,3))/(L_T));
gammar(4) = asin((L/2-points(4,3))/(L_T));
gammar(5) = asin((L/2-points(5,3))/(L_T));
gammar(6) = asin((L/2-points(6,3))/(L_T));
gammar(7) = asin((L/2-points(7,3))/(L_T));
gammar(8) = asin((L/2-points(8,3))/(L_T));
end

change_shaft_x.m
function [h,theta,v,w,points,gammar] =
change_shaft_x(F,h,theta,v,w,points,shaft_stress_direction
,gammar,deltat)

global r L L_T J m2 g;
Mi = zeros(1,8);
F_zi = zeros(1,8);
for i=1:8
    F_zi(i) = F(i)*sin(gammar(i));
end
Mi(1) = -(F(1)*sin(gammar(1))
*sin(shaft_stress_direction(1))*r*cos(theta)
-F(1)*cos(gammar(1))*sin(shaft_stress_direction(1))*
sin(shaft_stress_direction(1))*r*sin(theta));
Mi(2) = F(2)*sin(gammar(2))

```

```

* sin (shaft_stress_direction(2)) * r * cos (theta)
-F(2) * cos (gammar(2)) * sin (shaft_stress_direction(2)) *
sin (shaft_stress_direction(2)) * r * sin (theta);
Mi (3) = F(3) * sin (gammar(3))
* sin (shaft_stress_direction(3)) * r * cos (theta)
-F(3) * cos (gammar(3)) * sin (shaft_stress_direction(3)) *
sin (shaft_stress_direction(3)) * r * sin (theta);
Mi (4) = F(4) * sin (gammar(4))
* sin (shaft_stress_direction(4)) * r * cos (theta)
-F(4) * cos (gammar(4)) * sin (shaft_stress_direction(4)) *
sin (shaft_stress_direction(4)) * r * sin (theta);
Mi (5) = F(5) * sin (gammar(5))
* sin (shaft_stress_direction(5)) * r * cos (theta)
-F(5) * cos (gammar(5)) * sin (shaft_stress_direction(5)) *
sin (shaft_stress_direction(5)) * r * sin (theta);
Mi (6) = - (F(6) * sin (gammar(6))
* sin (shaft_stress_direction(6)) * r * cos (theta)
-F(6) * cos (gammar(6)) * sin (shaft_stress_direction(6)) *
sin (shaft_stress_direction(6)) * r * sin (theta));
Mi (7) = - (F(7) * sin (gammar(7))
* sin (shaft_stress_direction(7)) * r * cos (theta)
-F(7) * cos (gammar(7)) * sin (shaft_stress_direction(7)) *
sin (shaft_stress_direction(7)) * r * sin (theta));
Mi (8) = - (F(8) * sin (gammar(8))
* sin (shaft_stress_direction(8)) * r * cos (theta)
-F(8) * cos (gammar(8)) * sin (shaft_stress_direction(8)) *
sin (shaft_stress_direction(8)) * r * sin (theta));

M=0;
F_z=0;
for i=1:8
    M = M +Mi (i);
    F_z = F_z + F_zi (i);
end
alpha_theta = M/J;
a_theta = (F_z -m2*g)/ m2;
h= h+(2*v+a_theta*deltat)*deltat/2;
theta= theta+(2*w+alpha_theta*deltat)*deltat/2;
range_w=(2*w+alpha_theta*deltat)*deltat/2;
w = w + alpha_theta*deltat;
v = v + a_theta*deltat;

for i=1:8
    e_point

```

```
=w2eu2_8_x(points(i,1),points(i,2),points(i,3),range_w);  
  points(i,1) = e_point(1);  
  points(i,2) = e_point(2);  
  points(i,3) = e_point(3);  
end
```

```
gammar(1) = asin((L/2-points(1,3)-h)/(L_T));  
gammar(2) = asin((L/2-points(2,3)-h)/(L_T));  
gammar(3) = asin((L/2-points(3,3)-h)/(L_T));  
gammar(4) = asin((L/2-points(4,3)-h)/(L_T));  
gammar(5) = asin((L/2-points(5,3)-h)/(L_T));  
gammar(6) = asin((L/2-points(6,3)-h)/(L_T));  
gammar(7) = asin((L/2-points(7,3)-h)/(L_T));  
gammar(8) = asin((L/2-points(8,3)-h)/(L_T));
```

```
end
```